



طرق تحسين الحل العددي لمسائل القيم الحدية غير الخطية باستخدام الذكاء الاصطناعي

الهام يخلف أبوالشواشي

قسم التقنية الالكترونية

كلية التقنية الهندسية زوارة

زوارة ليبيا

نورية شعبان أبوالشواشي

القسم العام

كلية التقنية الهندسية زوارة

زوارة ليبيا

تاريخ الاستلام: 2025/12/8 - تاريخ المراجعة: 2025/12/12 - تاريخ القبول: 2025/12/19 - تاريخ النشر: 2025 /12/22

الملخص (Abstract)

مسائل القيم الحدية غير الخطية هي مسائل في الرياضيات تتكون من معادلات تفاضلية غير خطية لا تتناسب خطياً مع مشتقاتها أو دوالها بالإضافة إلى شروط حدية تحدد سلوك الحل عند حدود نطاق المشكلة. تتضمن الطرق التقليدية لحل المعادلات غير الخطية الطرق البيانية وطرق التحليل العددي مثل طريقة أويلر و طريقة Runge-Kutta تعتمد الطرق البيانية على رسم المعادلات وتحديد نقاط تقاطعها، بينما تعتمد الطرق العددية على إجراء عمليات تكرارية للاقترب من الحلول الدقيقة. تواجه مسائل القيم الحدية غير الخطية تحديات كبيرة عند حلها عددياً، بسبب عدم استقرار الطرق التقليدية، وتعدد الحلول الممكنة، والحاجة إلى دقة حسابية عالية.

يمثل الذكاء الاصطناعي بديلاً واعداً لتطوير أو تسريع الحلول العددية. من خلال عدد من الطرق لتطوير خاصية التنبؤ بالمخرجات إستناداً على كم من البيانات كمدخلات، يتم معالجتها حسب أنماط رياضية ومنطقية تم إستخلاصها من عمليات تعلم الآلة وعمليات تعلم عميق مسبقة، أدت إلى تشكيل ما يعرف بالشبكات العصبية؛ وهي نماذج رياضية تحاكي عمل العصبونات في الجهاز العصبي المركزي للإنسان.

تهدف هذه الورقة إلى مقارنة طرق الحل التقليدية لمسائل القيم الحدية غير الخطية مع التركيز على طريقة الفروق المحددة مع حلول تعتمد على الشبكات العصبية الصناعية، وبشكل خاص شبكات عصبية تتعامل مع الشروط الحدية كما تقدم دراسة حالة تقارن بين أداء الحلول التقليدية والحلول المعتمدة على الذكاء الاصطناعي. يتم تطبيق المنهجية المقترحة على مسألة نموذجية من الرتبة الثانية، ومقارنة النتائج من حيث الدقة والاستقرار العددي.

الكلمات المفتاحية

المعادلة التفاضلية اللاخطية، الحل العددي، طريقة الفروق المحددة، الذكاء الاصطناعي، الشبكات العصبية، مسائل القيم الحدية

1. المقدمة

مسائل القيم الحدية غير الخطية (Nonlinear Boundary Value Problems – NBVPs) هي مسائل في الرياضيات تتضمن حل معادلة تفاضلية مع شروط محددة عند نقاط متعددة في المجال، وغالبًا ما تكون هذه النقاط هي حدود المجال. على عكس مسائل القيمة الابتدائية التي تُحل بشروط عند نقطة واحدة، تتطلب مسائل القيم الحدية حلولاً تحقق الشروط عند أكثر من نقطة. وتعد من المواضيع الأساسية في النمذجة الرياضية لمحاكاة العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية، مثل انتقال الحرارة، وانتشار المواد، وتدفق الموائع. على سبيل المثال، تحديد درجة حرارة قضيب حديدي عند كل نقطة، حيث تكون درجة حرارة أحد طرفيه صفرًا مطلقًا ودرجة حرارة الطرف الآخر عند نقطة غليان الماء، هي مسألة قيمة حدية. حل هذه المسائل يتطلب تقنيات عددية دقيقة وقوية، خاصة عندما تتضمن العلاقات غير الخطية، والتي تزيد من تعقيد الحل. يصعب حل هذه المسائل تحليليًا، لذا يُعتمد غالبًا على الطرق العددية. إلا أن هذه الطرق تعاني من تحديات تتعلق بالاستقرارية، الدقة، والتكلفة الحسابية.

في العقود الأخيرة، أظهر الذكاء الاصطناعي (AI) قدرة كبيرة على تعزيز طرق الحلول العددية، وتوفير قدرات حسابية تفوق الإمكانيات البشرية في بعض الأحيان ومع التقدم في الذكاء الاصطناعي، ظهرت أساليب جديدة تعتمد على التعلم لتقريب الحلول أو تسريع العمليات العددية، مما يمهد لمرحلة جديدة في النمذجة العددية ويوفر فرصًا جديدة لتحسين الكفاءة والدقة في حل هذه المسائل.

2. الطرق العددية التقليدية المستخدمة لحل مسائل القيم الحدية غير الخطية

2.1 طريقة الفروق المحددة تستخدم لحل المسائل غير الخطية عن طريق تحويل المعادلات التفاضلية غير الخطية (سواء كانت عادية أو جزئية) إلى نظام من المعادلات الجبرية أو الخطية، والتي يمكن حلها لاحقًا باستخدام تقنيات الجبر المصفوفي. تُحوّل هذه التقنيات المعادلات التفاضلية المستمرة إلى نظام من المعادلات عن طريق تقسيم المجال إلى نقاط شبكة محدودة.

2.2 طريقة أويلر: هي طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية العادية من خلال تقريب الحل بخطوة بخطوة باستخدام مماس المنحنى عند كل نقطة. يتم حساب القيمة التالية في الحل بناءً على القيمة الحالية وميل المماس، مما يجعلها طريقة بسيطة وشائعة الاستخدام في الحوسبة العلمية. عيوب طريقة أويلر الرئيسية هي انخفاض الدقة وعدم الاستقرار العددي. ينتج عن ذلك أخطاء تقريبية تتراكم مع كل خطوة، وتكون النتيجة أقل دقة خاصة مع الخطوات الكبيرة، ويمكن أن يؤدي إلى نتائج خاطئة خاصة في الأنظمة المعقدة.

2.3 طريقة رانج كوتا هي مجموعة من الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية، حيث تُستخدم لتقدير حل تقريبي لنقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عند النقطة السابقة. تمتاز هذه الطرق بأنها تعطي دقة جيدة دون الحاجة إلى حساب المشتقات العليا، وتعتمد على حساب قيمة الدالة عدة مرات خلال كل فترة. من عيوب هذه الطريقة الحاجة إلى حسابات مكثفة، مما يتطلب قوة حاسوبية كبيرة، خاصة عند حل أنظمة معادلات غير خطية. كما أن دقتها تعتمد بشكل كبير على اختيار حجم الخطوة، مما قد يؤدي إلى أخطاء كبيرة إذا كانت قيمة الخطوة غير مناسبة.

3 التحديات المرتبطة بالحل العددي لمسائل القيم الحدية غير الخطية

3.1 صعوبة وجود حل مغلق (Analytical Solution)

- ✓ في كثير من الحالات، لا يمكن إيجاد حل تحليلي صريح لمسائل القيم الحدية غير الخطية، مما يستلزم الاعتماد الكامل على الطرق العددية لتقريب الحل.
- ✓ المعادلات غير الخطية قد تحتوي على أكثر من حل أو لا تحتوي على حل إطلاقاً، وهو ما يزيد من تعقيد التحليل.

3.2 وجود أكثر من حل ممكن (Multiplicity of Solutions)

- ✓ بعض مسائل القيم الحدية غير الخطية تحتوي على حلول متعددة، ويصعب التنبؤ مسبقاً أي من هذه الحلول هو الحل "الصحيح" أو المستقر.
- ✓ الطرق العددية قد تنجذب إلى أحد الحلول حسب القيم الابتدائية دون إعطاء إشعار بذلك.

3.3 صعوبة التعامل مع الشروط الحدية المعقدة أو غير الخطية

- ✓ قد تكون الشروط الحدية نفسها غير خطية أو تعتمد على مشتقات الدالة، مما يزيد من صعوبة دمجها ضمن الطريقة العددية.
- ✓ أحياناً يلزم إعادة صياغة المشكلة أو تعديل الطريقة العددية لتتمكن من استيعاب هذه الشروط.

3.4 صعوبة التحقق من دقة الحل

- ✓ في غياب الحل التحليلي، يصعب تقييم مدى دقة الحل العددي، خاصة إن كانت المشكلة ذات خصائص غير تقليدية (مثل الانفجار، التفكك، أو عدم انتظام الحل).
- ✓ غالباً ما يتم الاعتماد على مقارنة الحلول باستخدام شبكات مختلفة أو معايير تقارب داخلية.

3.5 الحاجة لخطوة زمنية أو مكانية صغيرة

لزيادة الدقة، مما يزيد من التكلفة الحسابية.

4 دور الذكاء الاصطناعي في تطوير الحلول العددية

في السنوات الأخيرة، لعب الذكاء الاصطناعي (AI) دوراً متنامياً في تحسين أداء الطرق العددية، وخاصة في المسائل المعقدة مثل مسائل القيم الحدية غير الخطية. لم يعد استخدام الذكاء الاصطناعي مقتصرًا على تطبيقات تحليل البيانات أو الرؤية الحاسوبية، بل أصبح أداة فعالة في مجالات الحوسبة العلمية والنمذجة الرياضية، وذلك من خلال استخدام عدة خوارزميات للذكاء الاصطناعي.

✓ الخوارزمية الجينية Genetic Algorithm

هي نوع من خوارزميات البحث والتحسين في مجال الذكاء الاصطناعي مستوحاة من الانتقاء الطبيعي والتطور البيولوجي، وتعمل على توليد وتحسين مجموعة من الحلول المحتملة لمشكلة معينة بشكل متكرر من خلال عمليات محاكاة التوالد الوراثي. حيث تقوم بإيجاد أفضل الحلول باعتبارها محاكاة القدرات الذهنية البشرية و أنماط عملها ، كالقدرة على الاستنتاج ورد الفعل و كذا التعلم و اكتساب الخبرات.

✓ خوارزميات تحسين السرب Particle Swarm Optimization

تستلهم خوارزميات تحسين السرب من السلوك الجماعي للأنظمة اللامركزية في الطبيعة، مثل أسراب الطيور أو مستعمرات النمل. تشمل الخوارزميات الرئيسية خوارزمية تحسين سرب الجسيمات (PSO) ، وخوارزمية تحسين مستعمرات النمل (ACO) ، وخوارزمية مستعمرات النحل الاصطناعية (ABC) .

✓ خوارزمية التعلم الهجين (Hybrid AI Methods)

هي خوارزمية تجمع بين ميزات وإجراءات متعددة من خوارزميات مختلفة لتحقيق أفضل أداء ممكن. يتم تصميم هذه الخوارزميات لاستفيد من نقاط القوة وتجنب نقاط الضعف في الخوارزميات التقليدية.

✓ الشبكات العصبية الاصطناعية (ANN)

هي برنامج أو نموذج تعلم آلي يتخذ القرارات بطريقة مشابهة للدماغ البشري، وذلك باستخدام العمليات التي تحاكي الطريقة التي تعمل بها الخلايا العصبية البيولوجية معاً لتحديد الظواهر وموازنة الخيارات والوصول إلى الاستنتاجات. تتكون كل الشبكات العصبية من طبقات من العقد، أو الخلايا العصبية الاصطناعية - طبقة إدخال، وطبقة مخفية واحدة أو أكثر، وطبقة إخراج. كل عقدة تتصل بأخرى وترسل البيانات إلى الطبقة التالية من الشبكة. تعتمد الشبكات العصبية على بيانات التدريب للتعلم وتحسين دقتها بمرور الوقت. بمجرد ضبط دقتها ضبطاً دقيقاً، فإنها تصبح أدوات فائقة الإمكانيات في مجال علوم الكمبيوتر والذكاء الاصطناعي، ما يسمح لنا بتصنيف البيانات وتجميعها بسرعة فائقة. يمكن أن تستغرق دقائق مقارنةً بساعات عند إجراء العمل يدوياً.

5. المنهجية

5.1 تحليل المشكلة العددية :اختيار نموذج رياضي لمسألة قيمة حدية غير خطية

5.2 تطبيق طريقة عددية تقليدية طريقة الفروق المحددة

5.3 بناء نموذج ذكاء اصطناعي يُدرَّب على الحلول الناتجة لتحسين التقريب أو تسريع الحساب.

5.4 تحليل النتائج من حيث الدقة، وقت التنفيذ، وعدد التكرارات اللازمة.

6. الصياغة الرياضية للمسألة

نعرض تطبيقًا عمليًا لمسألة نموذجية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y^2 = \sin x, \quad x \in [0, \pi], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

حيث أن هذه المعادلة غير خطية بسبب أن y^2 لا يوجد لها حل مغلق بسيط لذلك سنعتمد على الحل العددي الدقيق

7. الحل العددي باستخدام طريقة الفروق المحددة (Finite Difference Method FDM)

7.1 تقسيم الشبكة والتقريبات

نقسم المجال إلى N من الفترات المتساوية بحيث $h = \frac{\pi}{N}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

نفرض أن $y(x_i) \approx y_i$ فرق مركزي لترتيب المشتقة من الدرجة الثانية:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

7.2 معادلات العقد الداخلية:

استبدال في المعادلة يعطي النظام غير الخطي:

$$\frac{y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}}{h^2} + y_i^2 = \sin(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0$$

وبضرب الطرفين في h^2 نحصل على الصيغة الجبرية التالية:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h^2 y_i^2 = h^2 \sin(x_i)$$

وعليه ينتج لدينا نظام من المعادلات غير خطية لعقد على الشكل:

$$F(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h^2 y_i^2 - h^2 \sin(x_i) = 0$$

ويتم حل هذا النظام باستخدام طريقة نيوتن -رافسون :

نحتاج الى بناء مصفوفة جاكوبين وهي مصفوفة المشتقات الجزئية :

$$J = \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right]_{(N-1) \times (N-1)}$$

7.3 اشتقاق عناصر الجاكوبين

كل معادلة F_i تعتمد فقط على المتغيرات: y_{i-1} ، y_i ، y_{i+1} وبالتالي مصفوفة الجاكوبين ثلاثية القطر :

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}} = 1 \quad \text{1-المشتقة بالنسبة لـ } y_{i-1}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = -2 + 2h^2 y_i \quad \text{2-المشتقة بالنسبة لـ } y_i$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} = 1 \quad \text{3-المشتقة بالنسبة لـ } y_{i+1}$$

بناء على المشتقات السابقة تكون مصفوفة الجاكوبين ثلاثية الأقطار بالشكل التالي :

$$J = \begin{pmatrix} d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & d_{N-1} \end{pmatrix} \quad \text{حيث:}$$

$$d_i = -2 + 2h^2 y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

7.4 تطبيق نيوتن -رافسون

في كل تكرار يتم تحديث المتجه $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$

$$J(Y^{(K)}) \Delta Y^{(K)} = -F(Y^{(K)}), \quad \text{وفق:}$$

$$Y^{(K+1)} = Y^{(K)} + \Delta Y^{(K)}.$$

ويستمر التحديث حتى تحقيق معيار التقارب المطلوب .

8. الحل باستخدام الشبكات العصبية

8.1 بنية الشبكة العصبية

تم استخدام شبكة عصبية أمامية مكونة من طبقتين مخفيتين في كل طبقة 20 وحدة مخفية مع دالة تنشيط من نوع Tanh التي أثبتت كفاءتها العالية في تمثيل الحلول السلسلة للمعادلات التفاضلية كمرحلة أولى ثم تم تطوير الشبكة العصبية واستخدام أربع طبقات مخفية، تحتوي كل منها على 64 وحدة مخفية، مع دالة تفعيل من نوع (tanh) .

8.2 تضمين الشروط الحدية

لضمان تحقق الشروط الحدية يتم تعديل دالة الخرج للشبكة بالشكل التالي

$$\hat{y}(x) = x(\pi - x) N(x; \theta)$$

حيث $N(x; \theta)$ هو خرج الشبكة العصبية

8.3 دالة الخطأ والتقريب

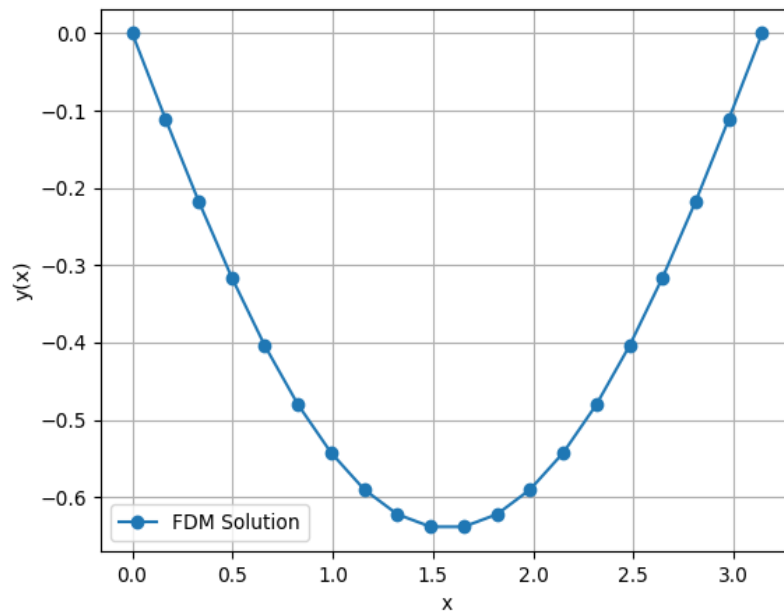
يتم استخدام دالة الخطأ المعتمدة على بقايا المعادلة التفاضلية أثناء تدريب الشبكة العصبية لتحديث أوزان الشبكة العصبية واختيار الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية وهو مقياس شائع في التحليل العددي لقياس دقة الحلول التقريبية.

$$E = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \hat{y}^2 - \sin(x) \right)^2$$

9. النتائج العددية والرسوم البيانية

9.1 النتائج العددية لحل الفروق المحددة (FDM)

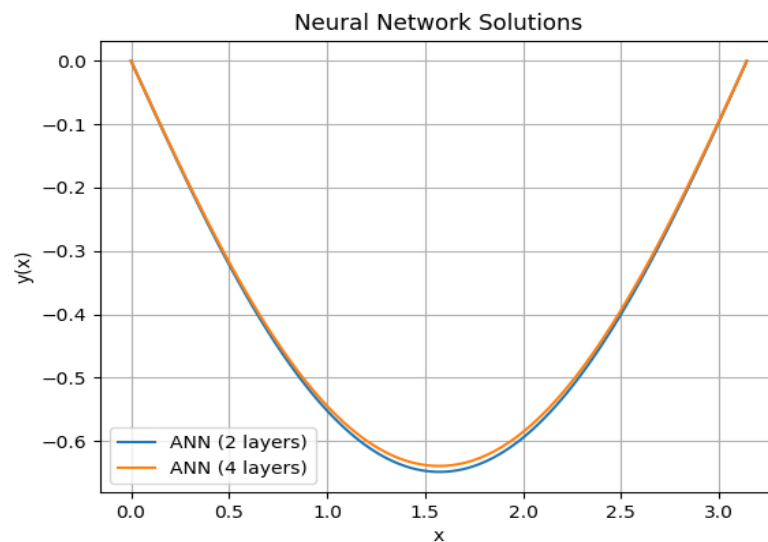
تم تقسيم المجال $[0, \pi]$ إلى شبكة منتظمة مكونة من عدد كافٍ من النقاط، واستخدام التقريب المركزي للمشتقة الثانية، مما أدى إلى نظام غير خطي من المعادلات الجبرية. تم حل هذا النظام باستخدام طريقة نيوتن التكرارية حتى الوصول إلى تقارب عددي مستقر. أظهرت النتائج أن الحل سالب على كامل المجال، ويبلغ أقصى انحراف له بالقرب من منتصف المجال $x \approx \pi/2$ ويوضح الشكل 9.1 الرسم البياني للحل باستخدام طريقة الفروق المحددة



الشكل 9.1 التمثيل لبياني للحل باستخدام طريقة الفروق المحددة

9.2 النتائج العددية لحل الشبكة العصبية

تم تدريب الشبكة عصبية من طبقتين في كل طبقة 20 وحدة ثم تم تطوير الشبكة الى أربع طبقات مخفية في كل طبقة 64 وحدة فكانت النتائج كما موضح بالرسم البياني 9.2



الشكل 9.2 التمثيل البياني للحل باستخدام الشبكات العصبية

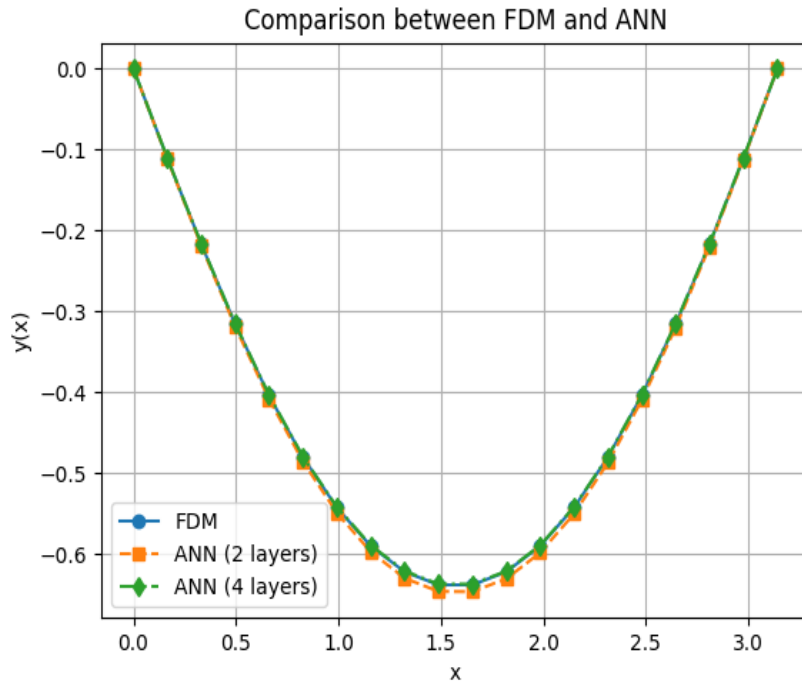
9.3 جدول القيم العددية

الجدول 9.1 يوضح القيم النهائية لطريقة الفروق المحددة مقابل الشبكة العصبية من طبقتين ومن أربع طبقات

جدول 9.1 القيم العددية للحل

x	FDM	ANN (2 layers)	ANN (4 layers)
0	0	0	0
0.165347	-0.11054	-0.11139	-0.11028
0.330694	-0.21692	-0.21881	-0.21646
0.496041	-0.3157	-0.31881	-0.3151
0.661388	-0.4042	-0.40858	-0.40351
0.826735	-0.48037	-0.48588	-0.47957
0.992082	-0.54274	-0.54919	-0.54185
1.157429	-0.59027	-0.59747	-0.58932
1.322776	-0.62229	-0.63004	-0.62128
1.488123	-0.63839	-0.64653	-0.63735
1.65347	-0.63839	-0.64682	-0.63741
1.818817	-0.62229	-0.63084	-0.62146
1.984164	-0.59027	-0.59862	-0.58954
2.149511	-0.54274	-0.55049	-0.54203
2.314858	-0.48037	-0.48718	-0.4796
2.480205	-0.4042	-0.40978	-0.40332
2.645552	-0.3157	-0.31987	-0.31472
2.810899	-0.21692	-0.21972	-0.21606
2.976246	-0.11054	-0.11204	-0.11007
3.141593	0	-6E-08	-5.9E-08

ويمكن تمثيل القيم العددية في الشكل البياني 9.3 لمقارنة الحل بطريقة الفروق المحددة مع طريقة الشبكات العصبية



الشكل 9.3 التمثيل البياني لمقارنة الحل

9.4 نسبة الخطأ

يُعد مقياس الجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ (RMSE) من أكثر المقاييس استخدامًا لتقييم دقة الحلول العددية، حيث يعكس متوسط الانحراف بين الحل الناتج عن الشبكة العصبية والحل المرجعي المستخرج باستخدام طريقة الفروق المحددة

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (y_{ANN}(x_i) - y_{FDM}(x_i))^2}$$

عند مقارنة الحل الناتج عن الشبكة العصبية من طبقتين مع الحل العددي المرجعي المستخرج بطريقة الفروق المحددة كانت نسبة الخطأ

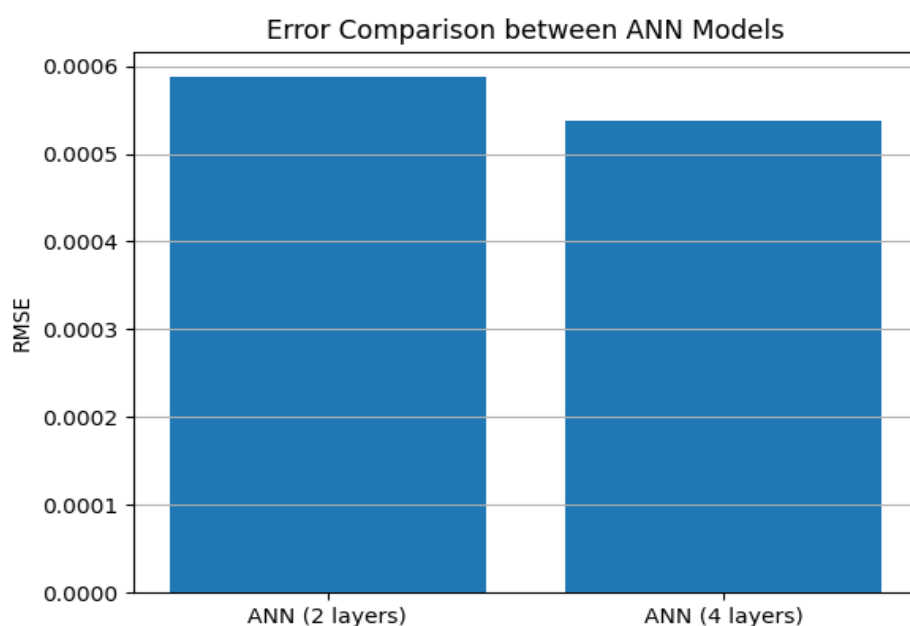
$$RMSE = 0.00575605076461027$$

لوحظ أن قيمة RMSE كانت أكبر نسبيًا مقارنةً بالشبكة الأعمق. ويشير ذلك إلى أن قدرة الشبكة على تمثيل السلوك غير الخطي للحل ما تزال محدودة. ورغم أن هذه البنية قادرة على النقاط الاتجاه العام للحل وتحقيق الشروط الحدية بدقة مقبولة، إلا أن عدد الطبقات والوحدات المخفية لا يكفي لتمثيل الانحناءات الدقيقة للحل، خاصة في المناطق التي يزداد فيها تأثير الحد غير الخطي y^2

عند زيادة عمق الشبكة إلى أربع طبقات مخفية، انخفضت قيمة RMSE فكانت

$$RMSE = 0.000757995069295967$$

ويُعزى هذا التحسن إلى أن الشبكات العميقة تمتلك قدرة أعلى على تقريب الدوال المعقدة، إضافةً إلى ذلك، فإن زيادة عدد الطبقات سمحت للشبكة بالتعامل بكفاءة أكبر مع اللاخطية الموجودة في المعادلة التفاضلية، كما تشير القيم المنخفضة لـ RMSE إلى أن الحل الناتج عن الشبكة العميقة ليس فقط متوافقاً مع الشروط الحدية، بل أيضاً أكثر استقراراً ودقة داخل المجال، وهو ما يتضح من التقارب الكبير بين المنحنيات في الرسم البياني المقارن الموضح بالشكل 9.4. والذي يوضح الانخفاض الملحوظ في قيمة RMSE عند استخدام الشبكة العميقة مقارنة بالشبكة ذات الطبقتين



شكل 9.4 مقارنة نسبة الخطأ

10. تحليل النتائج

1. يظهر الرسم البياني في الشكل 9.1 الحل العددي التقليدي (FDM) على النقاط الشبكية $N=20$ فكان الحل متقطع عند النقاط الشبكية، لأنه يعتمد على الفروق عند كل نقطة. الشكل يتبع تقريباً الشكل المتوقع للحل ولكن تظهر بعض التذبذبات الطفيفة بسبب عدد النقاط المحدود. وبذلك تكون طريقة الفروق المحددة دقيقة نسبياً، لكن دقة الرسم تزداد مع زيادة عدد النقاط
2. الشكل 9.2 يعرض الحل المولد بواسطة الشبكة العصبية. يلاحظ أن الرسم سلس جداً، بدون نقاط متقطعة، لأن الشبكة العصبية تنتج دالة تقريبية مستمرة على كل النقاط داخل المجال $[0, \pi]$ هناك نعومة واضحة مقارنة بالرسم الخاص بـ FDM خاصة عند المناطق التي يكون فيها الحل شديد التغير. وبذلك تنتج الشبكة العصبية حلاً سلساً وقريب جداً من الحل العددي التقليدي، مع تفوق في تمثيل المستمر للحل.

3. عند زيادة عدد الطبقات المخفية إلى أربع طبقات وفي كل طبقة تحتوي على 64 وحدة مخفية، لوحظ تحسن ملحوظ في دقة الحل الناتج عن الشبكة العصبية. انعكس ذلك في انخفاض قيمة RMSE بشكل واضح، مما يشير إلى قدرة أعلى للشبكة العميقة على تمثيل اللاخطية في المسألة. كما أظهرت الرسوم البيانية تقاربًا شبه تام بين حل الشبكة العصبية وحل الفروق المحددة، مع نعومة أعلى للحل الناتج عن الشبكة العصبية. ومع ذلك، لوحظ ازدياد في التكلفة الحسابية وزمن التدريب، مما يستدعي الموازنة بين الدقة العددية والكفاءة

11. الخاتمة

في هذا البحث، تم دراسة تحسين الحل العددي لمسائل القيم الحدية غير الخطية باستخدام الشبكات العصبية الاصطناعية، مع اعتماد طريقة الفروق المحددة كحل مرجعي. أظهرت النتائج أن الشبكات العصبية، خاصة ذات الأربع طبقات مخفية، حققت دقة أعلى مقارنةً بالشبكات الأقل عمقًا، كما يتضح من انخفاض قيم RMSE وتقارب الحلول مع النتائج العددية المرجعية. وتشير هذه النتائج إلى أن زيادة عمق الشبكة يسهم بشكل فعال في تمثيل اللاخطية المتأصلة في المسألة المدروسة. ويوصى في الأعمال المستقبلية بدراسة تأثير تقنيات تنظيم الشبكات وزيادة عدد نقاط التدريب، كما يوصى بتوسيع البحث في هذا المجال عبر دراسة مسائل ذات أبعاد أعلى وشروط أكثر تعقيدًا.. وايضا استخدام النماذج الهجينة التي تجمع بين قوة الطرق التقليدية وقدرة الذكاء الاصطناعي على التعلم والتحسين.

12. المراجع

1. محمد عبد الرحمن عوض، الطرق العددية: الأسس والتطبيقات الهندسية، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.
2. حسين علي حسين، الشبكات العصبية الاصطناعية: المبادئ والتطبيقات، دار الفكر العربي، القاهرة، مصر، 2014.
3. أحمد محمد حسن، مقدمة في الذكاء الاصطناعي وتطبيقاته، دار الكتاب الجامعي، العين، الإمارات العربية المتحدة، 2018.
4. J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, New York, 2002.
5. S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd ed., Prentice Hall, 2009.
6. I. E. Lagaris, A. Likas, and D. I. Fotiadis, "Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 9, no. 5, pp. 987–1000, 1998.